Početní část 2 - 28.6.2021

3. M je uzařená, neboť je to vzor uzavřené množiny $\{2\}$ při spojitém zobrazení

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^4.$$

Dále M leží uvnitř uzavřeného kvádru

$$\{(x,y,z):\ |x| \leq \sqrt{2},\ |y| \leq \sqrt{2},\ |z| \leq \sqrt[4]{4}\}.$$

M je tedy kompaktní a f je spojitá, f má tedy na M maximum i minimum. Dále f je evidentně spojitě diferencovatelná na $\mathbb{R}^3$.

Jelikož $\nabla g \neq 0$ na M, pak v bodě extrému a funkce f na M musí platit

$$\lambda \nabla g(a) = \nabla f(a),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

To vede na

$$\lambda(2x, 2y, 2z^3) = (yz, xz, xy).$$

Funkce f je kladná i záporná na M a nulová na rovinách, kde jedna ze souřadnic se rovná nule. Dále tedy můžeme bez obav předpokládat, že $xyz \neq 0$. Máme tedy najít všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 2\lambda x &= yz, \\ 2\lambda y &= xz, \\ 2\lambda z^3 &= xy. \end{aligned}$$

Vynásobíme rovnice dohromady a dostaneme

$$\begin{aligned} 8\lambda^3 z^3 xy = x^2y^2z^2 \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{xy}{z}}, \\ x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} &= yz^{\frac{4}{3}}, \\ x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}} &= xz^{\frac{4}{3}}, \\ x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{8}{3}} &= xy. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice získáme $z^{\frac{8}{3}} = (xy)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow z^4 = |xy| \Rightarrow |z| = \sqrt[4]{|xy|}$. Tento vztah použijeme v první a druhé rovnici. Získáme

$$x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}} = y|xy|^{\frac{1}{3}} \Rightarrow |x|^{\frac{4}{3}}|y|^{\frac{1}{3}} = |y|^{\frac{4}{3}}|x|^{\frac{1}{3}} \Rightarrow |x| = |y|,\ |z| = \sqrt{|x|}.$$

Konečně musí platit

$$2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^4 = 2x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{5}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow |x| = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Celkem máme kritické body:

$$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{2}{\sqrt{5}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}} \right),$$

kde znaménka jsou na sobě zcela nezávislá. Okamžitě vidíme, že maxima jsou v bodech, kde nastavá sudý počet znamének $-$ a minima v bodech, kde je počet $-$ lichý. Maximum f na M je tedy $\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{5}}$ a minimum $-\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt[4]{5}}$.

4. Dosadíme-li za x, y, u, v hodnotu 1, pak jsou obě rovnice zjevně splněny. Položme

$$\begin{aligned} F_1(x,y,u,v) &= u^2 + v^2 - x^3 - y^4, \\ F_2(x,y,u,v) &= u^2 + vx - x - y, \\ F &= (F_1, F_2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{pmatrix} (1,1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

je regulární a tedy existence příslušných funkcí u, v je důsledkem věty o implicitní funkci. Tyto funkce jsou navíc nekonečně diferencovatelné. Konečně první parciální derivace funkce u spočteme ze vztahu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} (1,1,1,1) &= - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{pmatrix} (1,1,1,1) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (1,1) \\ \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (1,1) \\ - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (1,1) \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} (1,1) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\frac{3}{2},\ \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) &= -1. \end{aligned}$$